บทที่ 1

พื้นฐานทางสถิติที่สำคัญบางอย่าง

วิชาสถิติเป็นได้ทั้งวิทยาศาสตร์ และศิลปะ อาจกล่าวได้ว่าเป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผลและความเป็นจริง มีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับงานวิจัยหรืองานทดลองค้นคว้า เป็นวิธีการที่สำคัญช่วยในการวางแผนทดลอง การเก็บตัวเลข การประมาณค่า การวิเคราะห์ข้อมูลหรือตัวเลข และการสรุปผล การตัดสินใจให้เป็นไปอย่างมีเหตุผล ปัจจุบันได้มีการนำเอาวิชาสถิติมาใช้อย่างกว้างขวางในการวิจัยค้นคว้าในสาขาวิชาต่าง ๆ จึงจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับทั้งผู้ทำงานวิจัย และผู้ที่สนใจในการที่จะใช้เทคโนโลยีขั้นสูง ซึ่งเป็นผลที่ได้จากงานวิจัย จะต้องมีความสนใจในหลักการทางสถิติ ก่อนที่จะพูดถึงหลักการและแผนการทดลองนั้น จะขอทบทวนพื้นฐานสถิติบางอย่างที่สำคัญเสียก่อน

ค่าเฉลี่ยและการวัดการกระจาย

ค่าเฉลี่ย (Mean)

ในการศึกษาลักษณะใดลักษณะหนึ่งไม่ว่าสาขาวิชาใดก็ตาม ข้อมูลที่ได้จะมีค่าสังเกตที่มีค่าต่าง ๆ กันไป จำนวนค่าสังเกตนั้นก็จะขึ้นอยู่กับขนาดของประชากร (population) หรือตัวอย่าง (sample) ที่กำลังศึกษา ในความแตกต่างนี้จะมีค่าสังเกตส่วนมากตกอยู่ในช่วงกลาง ๆ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับค่าหนึ่งที่ชี้ให้เห็นส่วนกลางของลักษณะนั้น และถือว่าเป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนั้น หรือเรียกกันว่า ค่าเฉลี่ย เช่น การศึกษาจำนวนลูกต่อครอกแรกเกิดของแม่สุกรพันธุ์ลาร์จไวท์ที่มหาวิทยาลัยแม่โจ้ พบว่าจำนวนลูกต่อครอกแรกเกิดเฉลี่ย 9.3 ตัว นั่นก็หมายถึง แม่สุกรพันธุ์ลาร์จไวท์ที่มหาวิทยาลัยแม่โจ้ ส่วนใหญ่จะให้ลูกใกล้เคียงกับ 9.3 ตัวต่อครอกเมื่อแรกเกิด ไม่ได้

หมายความว่าทุกตัว จะต้องให้ลูก 9.3 ตัวต่อครอก บางตัวอาจจะให้ลูก 3 ตัวต่อครอก หรือบางตัวอาจจะให้ลูกมากถึง 14 ตัวต่อครอก แต่ก็มีเพียงส่วนน้อย

ในการศึกษาประชากรเราใช้สัญญลักษณ์ μ (มิว) แทนค่าเฉลี่ยของประชากร เรียกว่า ค่า parameter ใช้แสดงถึงลักษณะของประชากรนั้น และในกรณีที่ประชากรมีขนาดใหญ่มากเราไม่สามารถ
จะศึกษาได้หมด เราก็จะมีการเลือกตัวอย่าง (sampling) ออกมาจากประชากร ซึ่งเราเรียกว่าตัวอย่างหรือตัวแทน (samples) ค่า statistic ที่แสดงลักษณะของตัวอย่าง เราใช้สัญญลักษณ์ $\overline{x}$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.1 ลูกสุกรครอกหนึ่ง จำนวน 7 ตัว มีน้ำหนักตัวแรกเกิดดังนี้ 0.87, 1.05, 1.00, 1.20, 1.08, 0.96 และ 0.95 กก. ตามลำดับ ดังนั้นค่าเฉลี่ยน้ำหนักตัวแรกเกิดของลูกสุกรทั้งครอกก็คือ

$$\mu = \frac{\mathbf{0.87 + 1.05 + 1.00 + 1.20 + 1.08 + 0.96 + 0.95}}{\mathbf{7}}$$

$$= \mathbf{1.02}\ \text{กก.}$$

แต่ถ้าสุ่มชั่งน้ำหนักลูกสุกรเพียง 3 ตัว เพื่อหาตัวอย่างสุ่ม สมมุติได้ ตัวที่ 2, 6 และ 7 ค่าสังเกตที่ได้ก็คือ 1.05, 0.96, และ 0.95 กก. ตามลำดับ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างนี้ก็เท่ากับ

$$\overline{X} = \frac{\mathbf{1.05 + 0.96 + 0.95}}{\mathbf{3}}$$

$$= \mathbf{0.99}\ \text{กก.}$$

ดังนั้น ถ้าค่าสังเกตมีจำนวน n ค่า หรือขนาดตัวอย่างเท่ากับ n เราก็ได้

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$$

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

ซึ่ง $\sum_{i=1}^{n} X_i$ หมายถึง ผลรวมของค่าสังเกตตัวที่ 1 จนถึงตัวที่ n

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

ในการศึกษาประชากรหรือตัวอย่าง นอกจากเราจะใช้ค่าเฉลี่ยแสดงลักษณะของประชากร หรือตัวอย่างแล้ว เรายังสามารถบอกลักษณะของประชากร หรือตัวอย่างให้ละเอียดขึ้นได้อีก โดยบอกถึงลักษณะความแตกต่างของค่าสังเกต หรือใช้เปรียบเทียบกับประชากรหรือตัวอย่างอื่นได้ด้วยว่า ประชา-กรใดหรือตัวอย่างใด มีการกระจายของค่าสังเกตมากกว่ากัน ค่าที่ใช้บอกถึงลักษณะการกระจาย หรือความแตกต่างนี้ ก็คือ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ซึ่งใช้สัญญลักษณ์ σ (sigma) แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร และใช้สัญญลักษณ์ S เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง

ในทางสถิติค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานนั้นต้องหามาจากการถอดรากที่สองของค่าความแปรปรวน (variance) ใช้ σ^2 เป็นสัญญลักษณ์แทนความแปรปรวนของประชากร และ S^2 แทนความแปรปรวนของตัวอย่าง ซึ่งค่าความแปรปรวนก็คือ ผลบวกของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตแต่ละค่ากับค่าเฉลี่ย หารด้วยจำนวนประชากร ดังนั้นถ้าจำนวนประชากรเท่ากับ N มีค่าเฉลี่ยประชากรเท่ากับ μ

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \ldots\ldots + (X_N - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2}{N}$$

จากตัวอย่างที่ 1.1 น้ำหนักตัวแรกเกิดของลูกสุกรครอกหนึ่ง จำนวน 7 ตัว เป็น 0.87, 1.05, 1.00, 1.20, 1.08, 0.96 และ 0.95 กก. ค่าเฉลี่ยน้ำหนักตัวแรกเกิดของลูกสุกรต่อตัวเท่ากับ 1.02 กก.

$$\sigma^2 = \frac{(0.87-1.02)^2 + (1.05-1.02)^2 \ldots\ldots + (0.95-1.02)^2}{7}$$

$$= 0.068$$

ความแปรปรวนของตัวอย่าง คือ ผลบวกของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตแต่ละค่ากับค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง หารด้วยจำนวนที่เป็นอิสระ (degree of freedom) ถ้าจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดของตัวอย่างเป็น n และ $\overline{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง จำนวนที่เป็นอิสระ ก็คือ n - 1

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

ถ้าสุ่มชั่งน้ำหนักแรกเกิดของลูกสุกรเพียง 3 ตัว ได้ค่าสังเกตดังนี้ 1.05, 0.96 และ 0.95 กก. และค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็น 0.99 กก.

$$S^2 = \frac{(1.05-0.99)^2 + (0.96-0.99)^2 + (0.95-0.99)^2}{3-1}$$

$$= \frac{0.0061}{2} = 0.003$$

ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่างก็จะเท่ากับ

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 / n-1}$$

$$= \sqrt{S^2} = \sqrt{0.003}$$

$$= 0.055$$

แต่ในทางปฏิบัติ เพื่อเป็นการประหยัดเวลาและสะดวกในการใช้เครื่องคิดเลข จึงนิยมใช้สูตร

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2 / n}{n-1}$$

$\sum X_i^2$ **คือ ผลบวกของกำลังสองของค่าสังเกตแต่ละค่า**

$(\sum X_i)^2$ **คือ กำลังสองของผลรวมของค่าสังเกตทุกค่า**

n คือ จำนวนค่าสังเกต

จากตัวอย่างการสุ่มชั่งน้ำหนักแรกเกิดของลูกสุกร

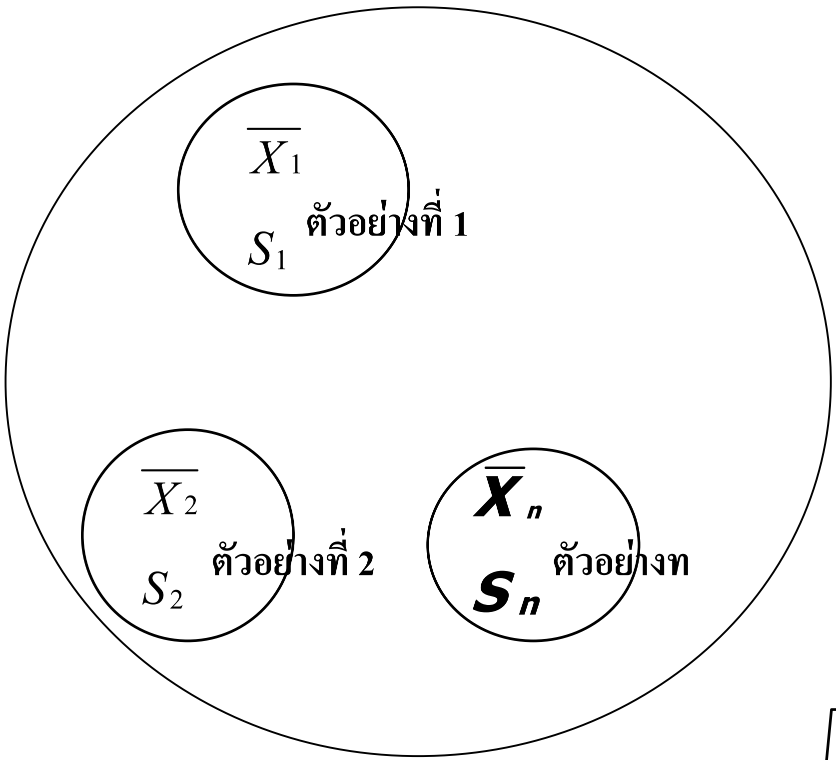
$$S^2 = \frac{1.05^2 + 0.96^2 + 0.95^2 - \frac{(1.05 + 0.96 + 0.95)^2}{3}}{3-1}$$

$$= \frac{2.9266 - 2.9205}{2}$$

$$= 0.003$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard error)

ถ้ามีการสุ่มตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างจากประชากรเดียวกันก็จะหาค่าเฉลี่ยของตัวอย่างได้หลายค่า ซึ่งมีค่าแตกต่างกันไป การกระจายของค่าเฉลี่ยของตัวอย่างนี้จะเกิดขึ้นในลักษณะคล้าย ๆ กับการกระจายของค่าสังเกตในแต่ละตัวอย่าง แต่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างจะมีการกระจายน้อยกว่า ซึ่งค่าที่บอกลักษณะการกระจายของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง ก็คือ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย (standard deviation of mean) หรือที่เรียกกันว่า ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error)



$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

สัมประสิทธิ์ของความผันแปร (Coefficient of variation)

ในการศึกษาประชากร 2 ประชากร หรือตัวอย่าง 2 ตัวอย่างในลักษณะเดียวกันหรือการทดลองแบบเดียวกัน แต่ทำซ้ำหลายครั้ง หลายสถานที่ เราสามารถเปรียบเทียบการกระจายของค่าสังเกตระหว่างประชากรหรือตัวอย่าง หรือระหว่างการ

ทดลองแต่ละครั้ง แต่ละสถานที่ได้ โดยเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน ซึ่งเป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคิดเป็นเปอร์เซนต์ของค่าเฉลี่ย

สัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน $(C.V.) = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\%$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา การสุ่มชั่งน้ำหนักแรกเกิดของลูกสุกรจะมีค่าสัมประสิทธิ์ความแปรปรวนเท่ากับ

$$C.V. = \frac{0.055}{0.99} \times 100 = 5.56 \quad \text{เปอร์เซ็นต์}$$

การกระจายแบบปกติ

ในการศึกษาทางด้านเกษตรนั้นตัวแปรส่วนใหญ่จะเป็นตัวแปรต่อเนื่อง (continuous variables) ทำให้มีการกระจายเป็นแบบปกติ (normal distribution) เช่น อัตราการเจริญเติบโตของสัตว์ ประสิทธิภาพการใช้อาหาร เป็นต้น ลักษณะของการกระจายแบบปกติ ก็คือ ค่าสังเกตส่วนใหญ่จะมีค่าอยู่ตอนกลาง ๆ และจะมีน้อยลงทางด้านข้างในลักษณะที่เหมือนกันทั้งสองข้าง ในการศึกษาประชากรที่มีการกระจายแบบปกติโดยการสุ่มตัวอย่างขึ้นมานั้น การสุ่มควรจะกระทำอย่างรัดกุมจริง ๆ ด้วยวิธีการนี้ก็จะได้ตัวอย่างที่มีการกระจายแบบปกติเช่นกัน แม้ว่าจะมีการคลาดเคลื่อนจากปกติบ้าง แต่ยิ่งมีจำนวนค่าสังเกตในตัวอย่างเพิ่มมากขึ้น นั่นก็คือ ขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น การกระจายก็ยิ่งเข้าแบบปกติมากยิ่งขึ้น ลักษณะทั่วไปของการกระจายแบบปกติก็คือ

1. มีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำ ความสูงของส่วนโค้งจะขึ้นอยู่กับค่าวาเรียนซ์ (σ^2) ถ้าค่าวาเรียนซ์มีค่าน้อยส่วนโค้งก็จะสูงมาก

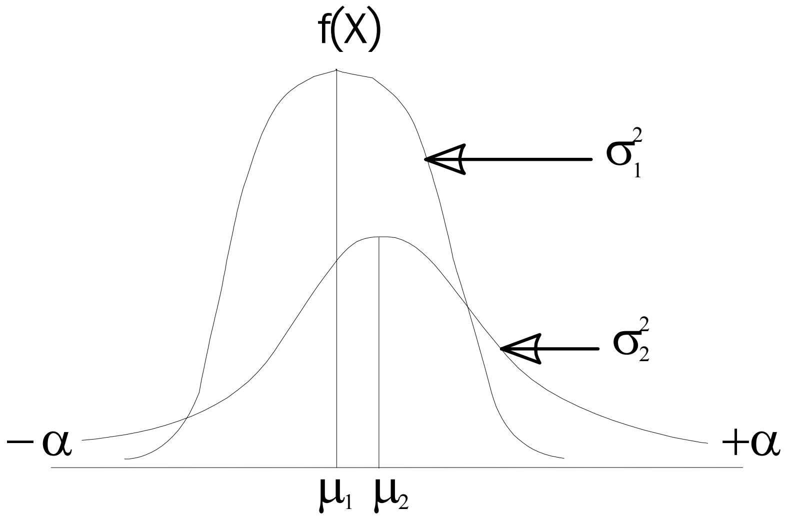
2. มีแนวโน้มเข้าหาศูนย์ที่ส่วนกลางของส่วนโค้ง

3. ส่วนโค้งจะลาดต่ำลงทางซ้ายและขวาในลักษณะที่เหมือนกัน

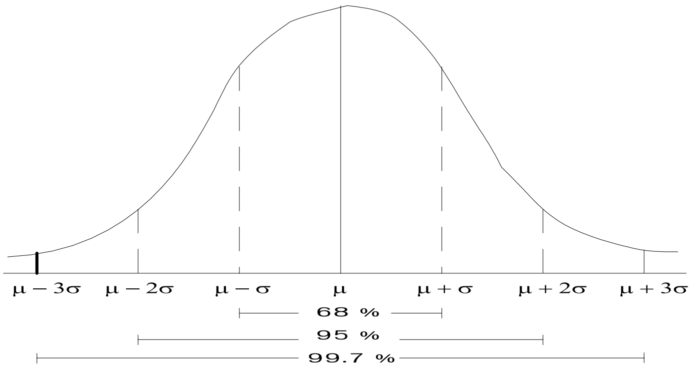
4. ไม่มีขอบเขตจำกัดทั้งทางด้านซ้ายและขวา นั่นคือ $-\alpha \leq X \leq +\alpha$

5. มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และวาเรียนซ์ $= \sigma^2$

6. พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติทั้งหมดเหนือแกนนอน คือค่าความน่าจะเป็น (probability) จะมีค่าเท่ากับ 1



โดยปกติหรือตามทฤษฎีแล้ว ค่าสังเกตส่วนใหญ่จะตกอยู่ในช่วงกลาง ๆ ใกล้กับค่าเฉลี่ย ประ-มาณ 68 เปอร์เซนต์ของค่าสังเกต จะตกอยู่ระหว่างค่าเฉลี่ยบวกและลบหนึ่งความเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(\mu \pm \sigma)$ ประมาณ 95 เปอร์เซนต์ของค่าสังเกตอยู่ระหว่าง $\mu \pm 2\sigma$ และภายใต้เส้นโค้งปกติที่อยู่ในช่วง $\mu \pm 3\sigma$ ก็จะมีค่าสังเกตประมาณ 99.7 เปอร์เซนต์



การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ หรือความน่าจะเป็นภายใต้โค้งปกตินั้นสามารถหาได้จาก

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{ในกรณีประชากร}$$

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{S} \quad \text{ในกรณีตัวอย่าง}$$

ในกรณีที่เราสุ่มตัวอย่างมาหลาย ๆ ตัวอย่างจากประชากรหนึ่ง เช่น การวัดความสามารถการให้ไข่ของไก่พันธุ์โรดไอแลนด์แดงในประเทศไทย เราใช้วิธีสุ่มตัวอย่างจากแต่ละจังหวัดหรือแต่ละภาคของประเทศ ซึ่งจากตัวอย่างที่สุ่มมาเราก็จะได้ค่าเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่างหลาย ๆ ค่าด้วยกัน ลักษณะการกระจายของค่าเฉลี่ยของตัวอย่างก็จะมีลักษณะเป็นแบบโค้งปกติเช่นกัน ดังนั้น เราก็จะได้พื้นที่ใต้โค้งปกติ เป็น

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

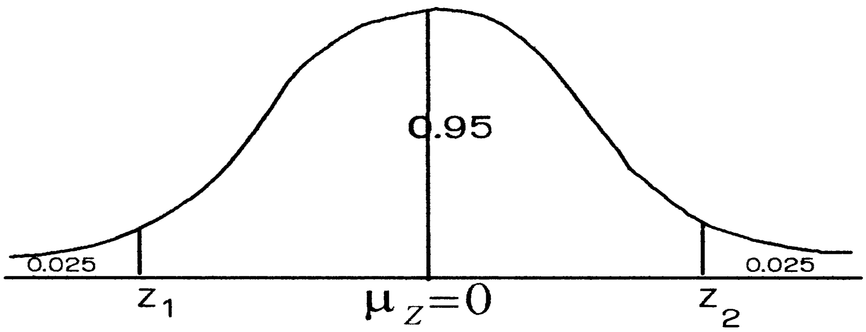
ซึ่ง $\overline{X}$ ก็คือ ค่าเฉลี่ยของแต่ละตัวอย่าง

$\mu_{\overline{X}}$ เป็นค่าเฉลี่ย ซึ่งได้มาจากค่าเฉลี่ยของตัวอย่างที่สุ่มมาทั้งหมด

$\sigma_{\overline{X}}$ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐานของค่าเฉลี่ย

ขอบเขตของความเชื่อมั่น

ในการประมาณค่าเฉลี่ยเป็นค่าเดี่ยว ๆ (point estimation) เช่น โดยเฉลี่ยสุกรพันธุ์ดูรอคให้ลูกเฉลี่ยเมื่อแรกคลอด 8 ตัวต่อครอก การประมาณแบบนี้ ถ้าถูกก็จะถูก 100 เปอร์เซนต์ แต่ถ้าผิดก็จะผิด 100 เปอร์เซนต์ เช่นกัน จึงมักไม่ค่อยนิยมใช้ วิธีที่นิยมใช้ ก็คือ การกำหนดเป็นช่วง เช่น จำนวนลูกเฉลี่ยเมื่อแรกคลอด 7-9 ตัวต่อครอก $(7 < \mu < 9)$ **ในการประมาณแบบนี้สามารถที่จะบอกได้ด้วยว่า มีขอบเขตของความเชื่อมั่น (confidence interval) เท่าไร เช่น ถ้าเรามีความเชื่อว่าค่าที่เรา ประมาณนั่นมีความเป็นไปได้ถึง 95 เปอร์เซนต์ นั่นก็คือ ใน 100 ครั้งมีโอกาสถูกถึง 95 ครั้ง**



$$\sigma_Z^2 = \sigma^2 = 1$$

$$Z_1 \langle Z \langle Z_2$$

$$Z_1 \langle \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \langle Z_2$$

$$-Z_{0.05-\frac{\alpha}{2}} \langle \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \langle Z_{0.05-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{X} - Z_{0.05-\frac{\alpha}{2}} \bullet \sigma / \sqrt{n} \langle \mu \langle \overline{X} + Z_{0.05-\frac{\alpha}{2}} \bullet \sigma / \sqrt{n}$$

เป็นขอบเขตความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของประชากร ใช้ในกรณีที่ทราบค่า σ^2 ในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ^2 ก็จะใช้ค่า s^2 แทน โดยที่

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$$\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \bullet S/\sqrt{n} \langle \mu \langle \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \bullet S/\sqrt{n}$$

จะใช้ในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ^2 แต่ทราบค่า s^2 และจำนวนตัวอย่างน้อยกว่า 30

การทดสอบสมมุติฐาน

สมมุติฐาน (hypothesis) ในที่นี้จะพูดถึงสมมุติฐานทางสถิติ (statistical hypothesis) ซึ่งเราตั้งขึ้นเกี่ยวกับตัว parameter เช่นเราต้องการทราบว่าค่าเฉลี่ยน้ำหนักแรกเกิดต่อตัวของลูกสุกรพันธุ์ดูรอคจะเท่ากับ 1.2 กก. หรือไม่

เราก็จะตั้งสมมุติฐานว่า $\mu = 1.2$ เรียกว่า null hypothesis เป็นข้อสมมุติฐานที่เราตั้งขึ้นเพื่อใช้ในการทดสอบ

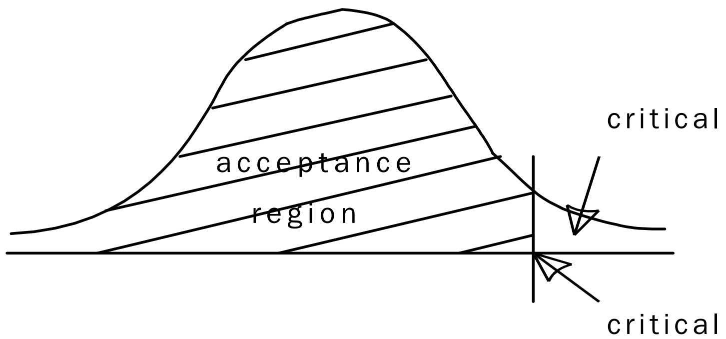
H_0: $\mu = 1.2$

ซึ่ง H_0 จะเป็นจริงหรือไม่ก็ได้ เราก็ต้องตั้งสมมุติฐานอีกอันขึ้นเพื่อเวลาเราไม่ยอมรับ H_0 เราก็จะไปยอมรับสมมุติฐานอีกอันที่เรียกว่า alternative hypothesis

นั่นคือ H_1: $\mu > 1.2$ หรือ $\mu < 1.2$ (การทดสอบทางเดียว)

หรือ H_1: $\mu \neq 1.2$ (การทดสอบสองทาง)

การทดสอบเราจะแบ่ง sample space ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่งเป็นส่วนที่ทำให้เรายอมรับ null hypothesis เราเรียกส่วนนี้ว่า acceptance region อีกส่วนหนึ่งเป็นส่วนที่เราไม่ยอมรับ null hypothesis เรียกส่วนนี้ว่า critical region ค่าที่แบ่ง sample space ออกเป็น 2 ส่วน เราเรียกว่า critical value



ระดับความมีนัยสำคัญ (Level of significance)

ถ้าเป็นขอบเขตความเชื่อมั่น เรามักจะกำหนดให้มีระดับความเชื่อมั่นมากที่สุด คือ 95 หรือ 99 เปอร์เซนต์ แต่ในการทดสอบสมมุติฐานเราจะต้องพยายามปฏิเสธการยอมรับ null hypothesis ให้มีความน่าจะเป็น (probability) น้อยที่สุด นั่นก็คือ ระดับความมีนัยสำคัญ หมายถึง โอกาสที่จะไม่ยอมรับ null hypothesis