การเปรียบเทียบตัวแทน 2 กลุ่ม

โดยทั่วไปการทดลองจะเป็นการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีปฏิบัติที่ใช้กระทำต่อสิ่งทดลอง (treatments) หลาย ๆ วิธีด้วยกัน แต่บางครั้งการทดลองก็จะเป็นการประมาณความแตกต่างระหว่างวิธีปฏิบัติเพียง 2 วิธี การเปรียบเทียบดังกล่าวเรียกว่า การเปรียบเทียบตัวแทน 2 กลุ่ม มีวิธีการศึกษาได้ 2 แบบ ดังจะได้กล่าวถึงรายละเอียดต่อไป

การเปรียบเทียบแบบไม่มีการจับคู่

เป็นการศึกษาในกรณีที่มี 2 ประชากร ซึ่งตัวอย่างของแต่ละประชากรจะถูกเลือกมาโดยอิสระต่อกัน หรือสิ่งทดลองทั้งหมดจะถูกแบ่งออก โดยสุ่มเป็น 2 พวก และให้วิธีปฏิบัติโดยสุ่มเช่นกัน เช่น การทดลองเปรียบเทียบผลการผสมพันธุ์สุกร 1 ครั้ง กับผสม 2 ครั้ง โดยใช้สุกรเพศเมียในฟาร์มเดียวกันแบ่งเป็น 2 พวกจำนวนเท่าๆ กัน พวกหนึ่งจะได้รับการผสมพันธุ์เพียงครั้งเดียวเมื่อเป็นสัด อีกพวกหนึ่งจะถูกผสมพันธุ์สองครั้ง โดยผสมครั้งที่สองห่างจากการผสมครั้งแรก 12 ชั่วโมง แล้วเปรียบเทียบจำนวนลูกเฉลี่ยต่อครอกของแต่ละพวก วิธีนี้นิยมใช้กันทั่วไปเพราะสะดวกในการปฏิบัติ

ในการทดลองที่ไม่มีการจับคู่นั้น การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างตัวแทน 2 กลุ่ม จะทำโดยการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย นั่นก็คือ $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ และมี

การประมาณความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากร คือ $\mu_1 - \mu_2$ การทดสอบนั้นแยกออกได้เป็น 3 วิธี ได้แก่

1. ในกรณีที่ทราบค่าวาเรียนซ์ของประชากร $\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right)$

ค่าที่ใช้ในการตรวจสอบ ก็คือ ค่า Z เมื่อ

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

โดย $\sigma^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$ = **ค่าวาเรียนซ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวแทน**

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

μ_1 = **ค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 1**

μ_2 = **ค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 2**

$\overline{X}_1$ = **ค่าเฉลี่ยของตัวแทนจากประชากรที่ 1**

$\overline{X}_2$ = **ค่าเฉลี่ยของตัวแทนจากประชากรที่ 2**

n_1 = **ขนาดของตัวแทนประชากรที่ 1**

n_2 = **ขนาดของตัวแทนประชากรที่ 2**

นำค่า Z ที่คำนวณได้ไปเทียบกับค่า Z ในตาราง

2. ในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ_1 และ σ_2 แต่ทราบว่า $\sigma_1 = \sigma_2$ และ n_1, n_2 น้อยกว่า 30

ค่าที่ใช้ในการทดสอบคือ ค่า t เมื่อ

$$t = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

$S^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$ **= ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย**

คำนวณจากตัวแทน เป็นค่าประมาณของ $\sigma^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$

$$= \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}$$

เนื่องจาก $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ดังนั้นเราจึงใช้ค่าวาเรียนซ์ร่วม (pooled variance, S_P^2) มาเป็นค่าประมาณของ σ_1^2 และ σ_2^2

S_P^2 **= pooled variance หรือค่าเฉลี่ยระหว่าง S_1^2 กับ S_2^2**

$$= \frac{\left(n_1 - 1\right)S_1^2 + \left(n_2 - 1\right)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ดังนั้น $$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

ค่า t ขึ้นกับ ค่าความเป็นอิสระ (*df*) = $n_1 + n_2 - 2$

ตัวอย่างที่ 2.1 การศึกษาเปรียบเทียบการผสมพันธุ์สุกรครั้งเดียวกับสองครั้งในฟาร์ม ต่างๆ ขนาดครอกของลูกสุกรแรกเกิดเฉลี่ย ดังนี้

ขนาดครอกลูกสุกรแรกเกิด (ตัว)	
ผสมครั้งเดียว	ผสมสองครั้ง
11.5	11.6
7.9	8.9
9.3	10.7
8.5	9.3
9.2	10.5
8.3	9.6
7.8	9.0
9.5	11.0
8.7	
9.0	

ต้องการทดสอบว่า ขนาดครอกลูกสุกรแรกเกิดของการผสมพันธุ์ครั้งเดียวจะแตกต่างกับการผสมพันธุ์สองครั้งหรือไม่

$$\mathbf{n_1 = 10} \qquad \mathbf{n_2 = 8}$$

$$\overline{X}_1 = \mathbf{8.97} \qquad \overline{X}_2 = \mathbf{10.07}$$

$$\mathbf{S_1 = 1.06} \qquad \mathbf{S_2 = 1.01}$$

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(10-1)(1.06)^2 + (8-1)(1.01)^2}{10+8-2}$$

$$= \frac{9(1.12) + 7(1.02)}{16}$$

$$= \frac{7.14 + 10.08}{16}$$

$$= 1.08$$

สมมุติฐานสำหรับตรวจสอบ $\mathbf{H_0 : \mu_1 = \mu_2}$

$\mathbf{H_A : \mu_1 \neq \mu_2}$

ค่าที่ใช้ตรวจสอบ คือ $$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

$$\therefore t = \frac{8.97 - 10.07}{\sqrt{1.08\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right)}}$$

$$= \frac{-1.1}{0.493}$$

$$= -2.23^{*}$$

$t_{0.05(16)}$ จากตาราง = 2.12

ซึ่งค่า t ที่คำนวณได้จะตกออกไปนอกค่า critical value ทางด้านซ้ายของเส้นโค้ง

ดังนั้นสรุปได้ว่า การผสมพันธุ์สุกรครั้งเดียวกับสองครั้งจะมีผลทำให้จำนวนลูกต่อครอกเมื่อแรกเกิดแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

3. ในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ_1 และ σ_2 แต่ทราบว่า $\sigma_1 \neq \sigma_2$ และ n_1, n_2 น้อยกว่า 30

ในบางกรณีเราไม่สามารถที่จะใช้ข้อสมมุติฐานที่ว่า $\sigma_1 = \sigma_2$ ได้ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ

ก. ตัวอย่าง 2 ชุดนั้นเราสุ่มเลือกมาจากคนละประชากร ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด เช่น การเปรียบเทียบอัตราการเจริญเติบโตของไก่กับนกกระทา

ข. เมื่อค่าเฉลี่ยของประชากรทั้ง 2 ประชากรมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งวาเรียนซ์มักจะผันแปรไปกับค่าเฉลี่ย ถ้าค่าเฉลี่ยสูงวาเรียนซ์ก็มักจะสูงตามด้วยจึงทำให้เกิดสงสัยว่า σ_1 ไม่เท่ากับ σ_2

ค. เมื่อตัวอย่างนั้นมาจากประชากรที่มีลักษณะการกระจายเป็นรูปเบ้ (skew) ซึ่งในกรณีเช่นนี้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยและวาเรียนซ์มีอยู่สูงมาก

ในกรณีที่ σ_1 ไม่เท่ากับ σ_2 ค่าวาเรียนซ์ของ $\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)$ ยังคงเท่าเดิม คือ

$$S^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \hat{\sigma}^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}$$

ซึ่งจะใช้ค่า S_1^2 และ S_2^2 เป็นค่าประมาณของ σ_1^2 และ σ_2^2 ตามลำดับ จะได้ค่าสำหรับการตรวจสอบเป็น

$$t = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

ค่า t นี้ มีลักษณะการกระจายอีกแบบหนึ่งที่ไม่ใช่ t-distribution แต่สามารถประมาณโดยใช้ t - distribution ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 **เมื่อ $n_1 = n_2 = n$**

คำนวณค่า t ตามแบบธรรมดา ใช้ critical value จากตาราง t ที่ $t_{\propto}$ มี *df* = (n - 1)

กรณีที่ 2 **เมื่อ $n_1 \neq n_2$ คำนวณค่า t'_{α} เพื่อหา critical value จากสูตร**

$$t'_{\alpha} = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

โดย $w_1 = \frac{S_1^2}{n_1}$ และ $w_2 = \frac{S_2^2}{n_2}$

t_1 = ค่า t จากตารางที่มี *df* เป็น $n_1 - 1$

t_2 = ค่า t จากตารางที่มี *df* เป็น $n_2 - 1$

ตัวอย่างที่ 2.2 **ต่อไปนี้เป็นข้อมูลอายุเมื่อเริ่มไข่ฟองแรกของไก่พันธุ์ไวท์เล็กฮอร์นกับ โรดไอแลนด์แดง**

อายุเมื่อเริ่มไข่ฟองแรก (วัน)	
โรดไอแลนด์แดง	**ไวท์เล็กฮอร์น**
165	160
154	175
175	165
194	180
185	170
215	
204	
234	
224	

$n_1 = 9$ $\qquad$ $n_2 = 5$

$\overline{X}_1 = 194.44$ $\qquad$ $\overline{X}_2 = 170.0$

$S_1 = 27.21$ $\qquad$ $S_2 = 7.91$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{194.44 - 170.0}{\sqrt{\frac{(27.21)^2}{9} + \frac{(7.91)^2}{5}}}$$

$$= \frac{24.44}{\sqrt{82.26 + 12.51}}$$

$$= \frac{24.44}{9.74} \quad = 2.51^{*}$$

critical value คือ

$$t'_{\alpha} = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

$t_1 = t_{0.025(8)}$ = **2.306 (two - tailed test)**

$t_2 = t_{0.025(4)}$ = **2.776 (two - tailed test)**

$$w_1 = \frac{S_1^2}{n_1} = \frac{(27.21)^2}{9} = 82.26$$

$$w_2 = \frac{S_2^2}{n_2} = \frac{(7.91)^2}{5} = 12.51$$

$$\therefore t'_{0.025} = \frac{82.26(2.306) + 12.51(2.776)}{82.26 + 12.51}$$

$$= \frac{189.69 + 34.73}{94.77}$$

$$= 2.368$$

ค่า t' ที่คำนวณได้จะมากกว่าค่า $t'_{0.025}$ ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าไก่พันธุ์ไวท์เล็กฮอร์นจะมีอายุเมื่อเริ่มไข่ฟองแรกแตกต่างกับไก่พันธุ์โรดไอแลนด์แดงอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

การเปรียบเทียบแบบจับคู่

ในการทดลองแบบจับคู่นั้นมีจุดประสงค์เพื่อจะเพิ่มความเที่ยง (precision) ในการเปรียบเทียบวิธีการ 2 อย่าง ซึ่งตัวอย่างที่เลือกมาเป็นคู่ ๆ จะต้องเหมือนกันหรือคล้ายคลึงกันมากที่สุด เพื่อว่าความแตกต่างทั้งหลายที่เกิดขึ้นหลังจากให้ทรีทเมนต์ย่อมเป็นผลมาจากทรีทเมนต์เกือบทั้งหมด

ตัวอย่างที่จับคู่กันได้ เช่น ฝาแฝดซึ่งถือว่ามีพันธุกรรมเหมือนกันเป็นการจับคู่กันที่ธรรมชาติได้สร้างไว้

ให้หรือการจับคู่ภายในตัวของตัวอย่างเอง (self pairing) ลูกสุกรที่มาจากครอกเดียวกัน และเพศเดียวกัน ซากสัตว์ซีกซ้ายและซีกขวา เป็นต้น

การเปรียบเทียบความแตกต่างของตัวอย่างแบบจับคู่ เมื่อให้ทรีทเมนต์ลงไป ก็คือ การทดสอบค่าเฉลี่ยของความแตกต่างของข้อมูลแต่ละคู่ (μ_d) สมมุติว่าเราต้องการเปรียบเทียบยา 2 ชนิด คือ ยา ก และ ข ซึ่งใช้สำหรับฉีดเข้าซากสัตว์เพื่อทำให้เนื้ออ่อนยุ่ย จึงใช้วิธีการแบ่งซากสัตว์ออกเป็น 2 ส่วน คือ ซ้ายและขวา ทำการฉีดยา ก ให้ซากซีกหนึ่งโดยการสุ่ม สมมุติว่าเป็นซีกขวา ส่วนซีกซ้ายที่เหลือฉีดยา ข ในการทดลองนี้ใช้สัตว์จำนวน n ตัว จะเห็นว่าในสัตว์แต่ละตัวถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน ซึ่งเป็นคู่ที่เหมือนกันนั่นเอง

ให้ n เป็นจำนวนคู่ของตัวอย่างที่เหมือนกัน

X_1 , X_2 เป็นข้อมูลที่วัดได้จากตัวอย่างแต่ละคู่ หลังจากได้รับทรีทเมนต์ 2 ชนิด

$d_i = X_{1i} - X_{2i}$ เป็นความแตกต่างของข้อมูลคู่ที่ i

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$\sigma_{\bar{d}}^2 =$ variance ของค่าเฉลี่ยของผลต่างของข้อมูล

เนื่องจาก $\overline{d}$ มีลักษณะการกระจายแบบโค้งปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น (μ_d)

และค่าความผันแปรเป็น $\sigma_{\overline{d}}$

เมื่อ $$\sigma_{\overline{d}}^2 = \frac{\sigma_d^2}{n}$$

ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบ (test statistic) ที่ใช้ก็คือ ค่า t

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{S_{\overline{d}}} = \frac{\overline{d}}{S_{\overline{d}}}$$

$S_{\overline{d}}^2$ **คือค่าประมาณของความแปรปรวนของความผันแปร ($\sigma_{\overline{d}}^2$) นั่นเอง**

$$S_{\overline{d}}^2 = \frac{S_d^2}{n}$$

$S_d^2 =$ **ค่าประมาณของ**

$$\sigma_d^2 = \frac{\sum\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum d_i^2 - {\left(\Sigma d_i\right)^2}/{n}}{n-1}$$

ค่า t ขึ้นกับ *df* = n - 1

ตัวอย่างที่ 2.3 ในการทดลองเปรียบเทียบยา 2 ชนิด ซึ่งใช้ฉีดให้กับซากสัตว์เพื่อเพิ่มความนุ่มของเนื้อ โดยแบ่งซากสัตว์ออกเป็น 2 ซีก แล้วฉีดยา ก ให้กับซากซีกหนึ่งโดยการสุ่ม ส่วนซีกที่เหลือฉีดยา ข ทำการวัดความนุ่มของเนื้อทั้งสองซีกได้ข้อมูล ดังนี้

สัตว์ตัวที่	ยา ก	ยา ข	$d_i = X_1 - X_2$	d_i^2
1	2.3	2.2	0.1	0.01
2	2.2	2.1	0.1	0.01
3	2.1	1.9	0.2	0.04
4	3.0	2.2	0.8	0.64
5	2.8	2.6	0.2	0.04
6	2.6	2.9	-0.3	0.09
7	2.2	2.2	0	0
8	2.3	2.0	0.3	0.09
9	2.5	2.3	0.2	0.04
10	2.8	2.6	0.2	0.04
รวม	24.8	23.0	1.8	1.0
เฉลี่ย	2.48	2.3	$\bar{d} = 0.18$	

$$S_d^2 = \frac{\sum d_i^2 - \left(\Sigma d_i\right)^2 / n}{n-1} = 0.075$$

ดังนั้น $S_{\bar{d}}^2 = \frac{S_d^2}{n} = \frac{0.075}{10} = 0.0075$

$$S_{\bar{d}} = 0.087$$

สมมุติฐานที่ต้องการทดสอบ คือ

$$H_0 : \mu_d = 0$$

$$H_A : \mu_d \neq 0$$

$$t = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}}$$

$$= \frac{0.18}{0.087} = 2.07$$

df **= n-1 = 10-1 = 9**

critical value คือ $t_{\frac{0.05}{2}(9)} = 2.262$ และ $-t_{\frac{0.05}{2}(9)} = -2.262$

สรุปผล : **ยาทั้งสองชนิดมีผลต่อความนุ่มของเนื้อสัตว์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ**

การตรวจสอบว่าวาเรียนซ์สองค่าเท่ากัน

ในการเปรียบเทียบตัวแทน 2 กลุ่ม ดังที่กล่าวมาแล้วนั้น จะต้องเป็นไปตามข้อสมมุติฐานที่ว่า วาเรียนซ์ของตัวแทนทั้งสองข้างเท่ากัน ดังนั้นจึงต้องมีการทดสอบเสียก่อนว่า σ_1 เท่ากับ σ_2 แล้วจึงดำเนินการเปรียบเทียบต่อไป ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบก็คือ $F_{(m,, n)}$ โดยที่ m และ n เป็นค่า *df* ของวาเรียนซ์ตัวเศษและตัวส่วน ตามลำดับ

สมมุติฐานสำหรับการทดสอบ ได้แก่

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

การทดสอบนี้เป็นแบบสองทาง ซึ่งไม่ได้ระบุว่า S_1^2 และ S_2^2 ตัวใดเป็นวาเรียนซ์ที่มีค่ามากหรือน้อย แต่ S_1^2 และ S_2^2 เป็นค่าวาเรียนซ์ของตัวแทนจากประชากรที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

เราจะไม่ยอมรับ H_0 เมื่อ $F \rangle F_{\frac{\alpha}{2}(m,n)}$

หรือ $F \langle F_{1-\frac{\alpha}{2}(m,n)}$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}(m,n)} = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}(n,m)}}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 ในการทดลองให้น้ำหวานกับผึ้ง 10 ตัว โดยใช้น้ำหวานที่มีความเข้มข้น 20% และอีก 10 ตัวให้น้ำหวานที่มีความเข้มข้น 65% แล้ววัดความเข้มข้นของน้ำผึ้งที่ได้จากผึ้งกลุ่มแรกปรากฏว่า มีความเข้มข้นลดลงดังนี้ 0.7, 0.5, 0.4, 0.7, 0.5, 0.4, 0.7, 0.4, 0.2 และ 0.5% ส่วนกลุ่มที่สองนั้น ความเข้มข้นของน้ำผึ้งลดลง 1.7, 2.8, 2.2, 1.4, 1.3, 2.1, 0.8, 3.4, 1.9 และ 1.4% ต้องการทดสอบว่าวาเรียนซ์ของการลดลงของความเข้มข้นน้ำผึ้งทั้งสองกลุ่มนี้เท่ากันหรือไม่โดย

ผึ้งกลุ่มที่ได้รับน้ำหวานเข้มข้น 65 % มีค่าเฉลี่ยลดลง 1.9 %, S_1^2 = 0.589

ผึ้งกลุ่มที่ได้รับน้ำหวานเข้มข้น 20 % มีค่าเฉลี่ยลดลง 0.5 %, S_2^2 = 0.027

สมมุติฐานสำหรับการทดสอบ คือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$= \frac{0.589}{0.027} = 22.1$$

การทดสอบนี้เป็นแบบสองทางใช้ α = 0.05

$$F_{0.025(9,9)} = 4.03$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}(m,n)} = \frac{1}{F_{\frac{\sigma}{2}(m,n)}}$$

$$F_{0.975(9,9)} = \frac{1}{4.03} = 0.248$$

***สรุปผล*: ไม่ยอมรับ H$_o$ นั่นคือ วาเรียนซ์ของการลดลงของความเข้มข้นของน้ำผึ้งจากผึ้งทั้งสองกลุ่มมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ**